数理解析研究所講究録
1084 巻 1999 年 60-71

無限級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法

日立 汎用コンピュータ事業部 後 保範(Yasunori Ushiro)
東大 大型計算機センター 金田康正(Yasumasa Kanada)
東大 大型計算機センター 高橋大介(Daisuke Takahashi)

n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき、無限級数で表現される関数に対して m 桁の精度を持つ入力値を与えて、n 桁の精度を持つ計算を行なう際に分割統治法を適用して、計算量を $O(M(n)\cdot n)$ から $O(M(n)\cdot \log_2 n\cdot \log_2 m)$ に削減する分割有理数化法(Divide and Rationalize Method, DRM 法)を提案する。この DRM 法では、m 桁の精度を持つ入力値 X を分母の桁数が上位桁から $\alpha,2\alpha,4\alpha,\cdots,2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分割し、各分割ごとに関数値を計算して加法定理で求める値を計算する部分と、分割した値で各級数にトーナメント方式を適用し２項ずつ通分処理で有理数化し、除算で n 桁精度の実数にする部分の二つから構成される。本方式は関数の多数桁計算で Brent[1)]のアルゴリズムより適用範囲が広く、アルゴリズムはより単純で分かり易い。また、並列処理に向いており、さらに計算桁数を増加するとき計算済みの有理数が再利用可能である。

A Divide and Rationalize Method which improves the multiple-precision function computation with infinite series.

General Purpose Computer Div. Hitachi Ltd Yasunori Ushiro
Computer Centre, University of Tokyo Yasumasa Kanada
Computer Centre, University of Tokyo Daisuke Takahashi

We propose a new divide and conquer method, we call it as the Divide and Rationalize Method (DRM), which improves the n-digit precision function computation with infinite series from $O(M(n)\cdot n)$ to $O(M(n)\cdot \log_2 n\cdot \log_2 m)$, where $M(n)$ is the number of computation operations required to multiply n-digit precision numbers and m is the digit of the input precision to be calculated. The DRM consists of two methods. The first method is a method which sums up from each rational numbers in the series to n-precision rational numbers with tournament method. The second method is a method which computes a value of the function for each digit corresponding to an input value of rational number with $\alpha,2\alpha,4\alpha,\cdots,2^{p-1}\alpha$ digit denominator from the higher digit and sums the value of the function according to the addition theorem. The coverage of the proposed method is wider in the multiple-precision function computation than the Brent's algorithm. Also, it is suitable for the parallel processing and possible to reuse intermediate results for more higher precision computation.

1. はじめに

三角関数、指数関数、対数関数および逆三角関数等の数学関数はテーラー展開で無限級数に展開できる。このような無限級数に展開できる関数を多数桁の精度で計算するためには、各項ごとに多数桁計算を行いそれらの和を用いる方法が知られている。

この方法の場合、n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき、n 桁精度の関数値計算に $O(M(n)\cdot n)$ の計算量が必要である。これに対し、m 桁 $(m \le n)$ の精度を持つ入力値の n 桁精度の関数値計算に分割統治法を適用して、計算量を $O(M(n)\cdot \log_2 n \cdot \log_2 m)$ に削減する方式を提案する。

本方式を分割有理数化法(Divide and Rationalize Method, 以下 DRM 法)と名づける。本 DRM 法は二つの方法から構成される。第一の方法で入力値が桁数 $O(1)$ の有理数の場合に n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき、トーナメント有理数化処理[2]で無限級数に展開される関数の n 桁精度計算の計算量を $O(M(n)\cdot \log_2 n)$ に削減する。

第二の方法で加法定理が適用できる関数の多数桁計算において、入力値を上位桁から分母の桁数が $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分割する。各分割した値に対する関数値の演算量を $f(n)$ とするとき、入力が m 桁精度で、n 桁精度の関数値の計算を $O(f(n)\cdot \log_2 m)$ の計算量で実現する。この二つの方法を結合して、多数桁精度の入力で多数桁の関数値計算の計算量を削減するのが本論文で提案する DRM 法である。

本 DRM 法は多数桁精度を必要とする関数計算で適用範囲が広く、関数計算まで含めた多数桁計算システムの構築に有用である。また Brent[1]のアルゴリズムより単純で分かり易く、自然な並列化が可能な点が特長である。

2. トーナメント有理数化処理

本章では、無限級数に展開される関数値の n 桁精度の計算で、入力値が $O(1)$ 桁の有理数の場合を考える。入力値が多数桁精度(m桁、$m \le n$) である場合の n 桁精度の関数値の計算については 4 章で述べる。

まず一般的に無限級数で表現される関数の計算方法を説明し、次いで級数の各項の係数が指数的に小さくなる対数関数(log)と、逆数的な減少をする逆正接関数(arctan)を例に具体的計算方法を説明する。

トーナメント有理数化処理においては、分子、分母の桁数が求める桁数 n に達したところで中止し、除算で小数点以下 n 桁精度の実数に変換する。

2.1 無限級数関数の有理数化処理

関数 $f(\frac{y}{x})$ が無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty}[\frac{a_i}{b_i}\cdot(\frac{y}{x})^{\gamma+\beta i}]$ に展開されるとする。ここで、a_i, b_i は互いに素な整数で、ある番号 k 以上で $a_k < b_k$ とする。また、γ は整数で、β は自然数とする。

xとyを互いに素な整数で$y<x$とするとき、関数$f(\frac{y}{x})$の値を小数点以下B進n桁の精度で求めるには$\frac{b_q}{a_q}\cdot(\frac{x}{y})^{\gamma+\beta q}\cdot[1-(\frac{y}{x})^{\beta}]\geq B^{n+1}$となる項数$q$まで計算すればよい。

関数$f(\frac{y}{x})$は2項ずつまとめて表示すると下記のように表現される。

$$f(\frac{y}{x})=(\frac{y}{x})^{\gamma}[\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1}{b_1}(\frac{y}{x})^{\beta}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+2\beta}[\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}(\frac{y}{x})^{\beta}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+4\beta}[\frac{a_4}{b_4}+\frac{a_5}{b_5}(\frac{y}{x})^{\beta}]+\cdots$$

これを以下のように、トーナメント方式を適用し２項ずつ通分処理で有理数にする。

$$1段目:\left\{\begin{aligned}&=(\frac{y}{x})^{\gamma}\cdot\frac{a_0b_1x^{\beta}+a_1b_0y^{\beta}}{b_0b_1x^{\beta}}+(\frac{y}{x})^{\gamma+2\beta}\cdot\frac{a_2b_3x^{\beta}+a_3b_2y^{\beta}}{b_2b_3x^{\beta}}+(\frac{y}{x})^{\gamma+4\beta}\cdot\frac{a_4b_5x^{\beta}+a_5b_4y^{\beta}}{b_4b_5x^{\beta}}\\&\qquad+(\frac{y}{x})^{\gamma+6\beta}\cdot\frac{a_6b_7x^{\beta}+a_7b_6y^{\beta}}{b_6b_7x^{\beta}}+\cdots\\&=(\frac{y}{x})^{\gamma}[\frac{c_0}{d_0}+(\frac{y}{x})^{2\beta}\cdot\frac{c_1}{d_1}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+4\beta}[\frac{c_2}{d_2}+(\frac{y}{x})^{2\beta}\cdot\frac{c_3}{d_3}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+8\beta}[\frac{c_4}{d_4}+(\frac{y}{x})^{2\beta}\cdot\frac{c_5}{d_5}]+\cdots\end{aligned}\right\}$$

ここで、$c_k=a_{2k}b_{2k+1}x^{\beta}+a_{2k+1}b_{2k}y^{\beta}$, $d_k=b_{2k}b_{2k+1}x^{\beta}$; $k=0,1,2,\cdots$

$$2段目:\left\{\begin{aligned}&=(\frac{y}{x})^{\gamma}\cdot\frac{c_0d_1x^{2\beta}+c_1d_0y^{2\beta}}{d_0d_1x^{2\beta}}+(\frac{y}{x})^{\gamma+4\beta}\cdot\frac{c_2d_3x^{2\beta}+c_3d_2y^{2\beta}}{d_2d_3x^{2\beta}}\\&\qquad+(\frac{y}{x})^{\gamma+8\beta}\cdot\frac{c_4d_5x^{2\beta}+c_5d_4y^{2\beta}}{d_4d_5x^{2\beta}}+\cdots\\&=(\frac{y}{x})^{\gamma}[\frac{e_0}{f_0}+(\frac{y}{x})^{4\beta}\cdot\frac{e_1}{f_1}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+8\beta}[\frac{e_2}{f_2}+(\frac{y}{x})^{4\beta}\cdot\frac{e_3}{f_3}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+16\beta}[\frac{e_4}{f_4}+(\frac{y}{x})^{4\beta}\cdot\frac{e_5}{f_5}]+\cdots\end{aligned}\right\}$$

ここで、$e_k=c_{2k}d_{2k+1}x^{2\beta}+c_{2k+1}d_{2k}y^{2\beta}$, $f_k=d_{2k}d_{2k+1}x^{2\beta}$; $k=0,1,2,\cdots$

$$3段目:\left\{\begin{aligned}&=(\frac{y}{x})^{\gamma}\cdot\frac{e_0f_1x^{4\beta}+e_1f_0y^{4\beta}}{f_0f_1x^{4\beta}}+(\frac{y}{x})^{\gamma+8\beta}\cdot\frac{e_2f_3x^{4\beta}+e_3f_2y^{4\beta}}{f_2f_3x^{4\beta}}\\&\qquad+(\frac{y}{x})^{\gamma+16\beta}\cdot\frac{e_4f_5x^{4\beta}+e_5f_4y^{4\beta}}{f_4f_5x^{4\beta}}+\cdots\\&=(\frac{y}{x})^{\gamma}[\frac{g_0}{h_0}+(\frac{y}{x})^{8\beta}\cdot\frac{g_1}{h_1}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+16\beta}[\frac{g_2}{h_2}+(\frac{y}{x})^{8\beta}\cdot\frac{g_3}{h_3}]+(\frac{y}{x})^{\gamma+32\beta}[\frac{g_4}{h_4}+(\frac{y}{x})^{8\beta}\cdot\frac{g_5}{h_5}]+\cdots\end{aligned}\right\}$$

ここで、$g_k=e_{2k}f_{2k+1}x^{4\beta}+e_{2k+1}f_{2k}y^{4\beta}$, $g_k=f_{2k}f_{2k+1}x^{4\beta}$; $k=0,1,2,\cdots$

一般的に、j段目の$2i$項と$2i+1$項の有理数から$j+1$段目のi項の有理数への通分処理は次のようになる。

$$j\text{段目の}2i\text{項と}2i+1\text{項}：(\frac{y}{x})^{\gamma+2Si\beta}[\frac{F_{j,2i}}{G_{j,2i}}+(\frac{y}{x})^{S\beta}\cdot\frac{F_{j,2i+1}}{G_{j,2i+1}}]$$

$$j+1\text{段目の}i\text{項}\quad：(\frac{y}{x})^{\gamma+2Si\beta}\cdot\frac{F_{j+1,i}}{G_{j+1,i}}$$

ここで、$S=2^j$，$F_{j+1,i}=F_{j,2i}G_{j,2i+1}x^{S\beta}+F_{j,2i+1}G_{j,2i}y^{S\beta}$

$$G_{j+1,i}=G_{j,2i}G_{j,2i+1}x^{S\beta}\quad ;i=0,1,2,\cdots$$

以下、$F_{j+1,i}$か$G_{j+1,i}$の桁数がn桁に達するt段目まで上記処理を続ける。

2.2 具体例

(1) $\log(1+\frac{y}{x})$の有理数化処理

xとyを互いに素な整数で$y<x$とするとき、$\log(1+\frac{y}{x})$のテーラー展開級数は次のようになる。

$$\log(1+\frac{y}{x})=\frac{y}{x}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{y^3}{x^3}-\frac{1}{4!}\cdot\frac{y^4}{x^4}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{y^5}{x^5}-\frac{1}{6!}\cdot\frac{y^6}{x^6}+\cdots$$

上記級数展開に従って小数点以下B進n桁の精度で求めるには、$q!(\frac{x}{y})^q\geq B^{n+1}$となる項数$q$まで計算すればよい。　級数を２項ずつまとめて表示すると$\log(1+\frac{y}{x})$は次のようになる。

$$\log(1+\frac{y}{x})=[\frac{y}{x}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{y^2}{x^2}]+[\frac{1}{3!}\cdot\frac{y^3}{x^3}-\frac{1}{4!}\cdot\frac{y^4}{x^4}]+[\frac{1}{5!}\cdot\frac{y^5}{x^5}-\frac{1}{6!}\cdot\frac{y^6}{x^6}]$$
$$+[\frac{1}{7!}\cdot\frac{y^7}{x^7}-\frac{1}{8!}\cdot\frac{y^8}{x^8}]+[\frac{1}{9!}\cdot\frac{y^9}{x^9}-\frac{1}{10!}\cdot\frac{y^{10}}{x^{10}}]+[\frac{1}{11!}\cdot\frac{y^{11}}{x^{11}}-\frac{1}{12!}\cdot\frac{y^{12}}{x^{12}}]+\cdots$$

これを、以下のようにトーナメント方式を適用し２項ずつ通分処理で有理数にする。

$$
1段目:\left\{\begin{array}{l}
=\dfrac{y}{2!x^2}(2x-y)+\dfrac{y^3}{4!x^4}(4x-y)+\dfrac{y^5}{6!x^6}(6x-y)+\dfrac{y^7}{8!x^8}(8x-y) \\
\qquad +\dfrac{y^9}{10!x^{10}}(10x-y)+\dfrac{y^{11}}{12!x^{12}}(12x-y)+\cdots \\
=\dfrac{y}{x^2}[\dfrac{a_0}{b_0}+\dfrac{y^2}{b_0x^2}\cdot\dfrac{a_1}{b_1}]+\dfrac{y^5}{b_0b_1x^6}[\dfrac{a_2}{b_2}+\dfrac{y^2}{b_2x^2}\cdot\dfrac{a_3}{b_3}]+\dfrac{y^9}{b_0b_1b_2b_3x^{10}}[\dfrac{a_4}{b_4}+\dfrac{y^2}{b_4x^2}\cdot\dfrac{a_5}{b_5}]+\cdots
\end{array}\right\}
$$

ここで、$a_k=(2k+2)x-y,\ b_k=(2k+1)(2k+2)\quad ;k=0,1,2,\cdots$

$$
2段目:\left\{\begin{array}{l}
=\dfrac{y}{x^4}\cdot\dfrac{a_0b_1x^2+a_1y^2}{d_0}+\dfrac{y^5}{d_0x^8}\cdot\dfrac{a_2b_3x^2+a_3y^2}{d_1}+\dfrac{y^9}{d_0d_1x^{12}}\cdot\dfrac{a_4b_5x^2+a_5y^2}{d_2} \\
\qquad +\dfrac{y^{13}}{d_0d_1d_2x^{16}}\cdot\dfrac{a_6b_7x^2+a_7y^2}{d_3}+\cdots \\
=\dfrac{y}{x^4}[\dfrac{c_0}{d_0}+\dfrac{y^4}{d_0x^4}\cdot\dfrac{c_1}{d_1}]+\dfrac{y^9}{d_0d_1x^{12}}[\dfrac{c_2}{d_2}+\dfrac{y^4}{d_2x^4}\cdot\dfrac{c_3}{d_3}] \\
\qquad +\dfrac{y^{17}}{d_0d_1d_2d_3x^{20}}[\dfrac{c_4}{d_4}+\dfrac{y^4}{d_4x^4}\cdot\dfrac{c_5}{d_5}]+\cdots
\end{array}\right\}
$$

ここで、$c_k=a_{2k}b_{2k+1}x^2+a_{2k+1}y^2,\ d_k=b_{2k}b_{2k+1},k=0,1,2,\cdots$

$$
3段目:\left\{\begin{array}{l}
=\dfrac{y}{x^8}\cdot\dfrac{c_0d_1x^4+c_1y^4}{f_0}+\dfrac{y^9}{f_0x^{16}}\cdot\dfrac{c_2d_3x^4+c_3y^4}{f_1}+\dfrac{y^{17}}{f_0f_1x^{24}}\cdot\dfrac{c_4d_5x^4+c_5y^4}{f_2}+\cdots \\
=\dfrac{y}{x^8}[\dfrac{e_0}{f_0}+\dfrac{y^8}{f_0x^8}\cdot\dfrac{e_1}{f_1}]+\dfrac{y^{17}}{f_0f_1x^{24}}[\dfrac{e_2}{f_2}+\dfrac{y^8}{f_2x^8}\cdot\dfrac{e_3}{f_3}] \\
\qquad +\dfrac{y^{33}}{f_0f_1f_2f_3x^{40}}[\dfrac{e_4}{f_4}+\dfrac{y^8}{f_4x^8}\cdot\dfrac{e_5}{f_5}]+\cdots
\end{array}\right\}
$$

ここで、$e_k=c_{2k}d_{2k+1}x^4+c_{2k+1}y^4,\ f_k=d_{2k}d_{2k+1},k=0,1,2,\cdots$

以下、[ ]内の有理数の分子か分母の桁数がn桁に達するt段目まで処理を続ける。

(2)　$\arctan(\frac{y}{x})$の有理数化処理

xとyを互いに素な整数で$y<x$とするとき、$\arctan(\frac{y}{x})$のテーラー展開級数は次のようになる。

$$
\arctan(\frac{y}{x})=\frac{y}{x}-\frac{y^3}{3x^3}+\frac{y^5}{5x^5}-\frac{y^7}{7x^7}+\frac{y^9}{9x^9}-\frac{y^{11}}{11x^{11}}+\cdots
$$

上記級数展開に従って小数点以下 B 進 n 桁の精度で求めるには、$(2q-3)(\frac{x}{y})^{2q-3} \geq B^{n+1}$ となる項数 q まで計算すればよい。級数を２項ずつまとめて表示すると $\arctan(\frac{y}{x})$ は次のようになる。

$$\arctan(\frac{y}{x}) = [\frac{y}{x} - \frac{y^3}{3x^3}] + [\frac{y^5}{5x^5} - \frac{y^7}{7x^7}] + [\frac{y^9}{9x^9} - \frac{y^{11}}{11x^{11}}] + [\frac{y^{13}}{13x^{13}} - \frac{y^{15}}{15x^{15}}] + [\frac{y^{17}}{17x^{17}} - \frac{y^{19}}{19x^{19}}] + [\frac{y^{21}}{21x^{21}} - \frac{y^{23}}{23x^{23}}] + \cdots$$

これを以下のように、トーナメント方式を適用し２項ずつ通分処理で有理数にする。

$$1段目:\left\{\begin{aligned} &= \frac{y}{x}\cdot\frac{3x^2-y^2}{3x^2} + \frac{y^5}{x^5}\cdot\frac{7x^2-5y^2}{35x^2} + \frac{y^9}{x^9}\cdot\frac{11x^2-9y^2}{99x^2} + \frac{y^{13}}{x^{13}}\cdot\frac{15x^2-13y^2}{195x^2} \\ &\quad + \frac{y^{17}}{x^{17}}\cdot\frac{19x^2-17y^2}{323x^2} + \frac{y^{21}}{x^{21}}\cdot\frac{23x^2-21y^2}{483x^2} + \cdots \\ &= \frac{y}{x}[\frac{a_0}{b_0} + \frac{y^4}{x^4}\cdot\frac{a_1}{b_1}] + \frac{y^9}{x^9}[\frac{a_2}{b_2} + \frac{y^4}{x^4}\cdot\frac{a_3}{b_3}] + \frac{y^{17}}{x^{17}}[\frac{a_4}{b_4} + \frac{y^4}{x^4}\cdot\frac{a_5}{b_5}] + \cdots \end{aligned}\right\}$$

ここで、$a_k = (4k+3)x^2 - (4k+1)y^2$, $b_k = (4k+1)(4k+3)x^2$; $k = 0,1,2\cdots$

$$2段目:\left\{\begin{aligned} &= \frac{y}{x}\cdot\frac{a_0b_1x^4 + a_1b_0y^4}{b_0b_1x^4} + \frac{y^9}{x^9}\cdot\frac{a_2b_3x^4 + a_3b_2y^4}{b_2b_3x^4} + \frac{y^{17}}{x^{17}}\cdot\frac{a_4b_5x^4 + a_5b_4y^4}{b_4b_5x^4} + \cdots \\ &= \frac{y}{x}[\frac{c_0}{d_0} + \frac{y^8}{x^8}\cdot\frac{c_1}{d_1}] + \frac{y^{17}}{x^{17}}[\frac{c_2}{d_2} + \frac{y^8}{x^8}\cdot\frac{c_3}{d_3}] + \frac{y^{33}}{x^{33}}[\frac{c_4}{d_4} + \frac{y^8}{x^8}\cdot\frac{c_5}{d_5}] + \cdots \end{aligned}\right\}$$

ここで、$c_k = a_{2k}b_{2k+1}x^4 + a_{2k+1}b_{2k}y^4$, $d_k = b_{2k}b_{2k+1}x^4$; $k = 0,1,2\cdots$

$$3段目:\left\{\begin{aligned} &= \frac{y}{x}\cdot\frac{c_0d_1x^8 + c_1d_0y^8}{d_0d_1x^8} + \frac{y^{17}}{x^{17}}\cdot\frac{c_2d_3x^8 + c_3d_2y^8}{d_2d_3x^8} + \frac{y^{33}}{x^{33}}\cdot\frac{c_4d_5x^8 + c_5d_4y^8}{d_4d_5x^8} + \cdots \\ &= \frac{y}{x}[\frac{e_0}{f_0} + \frac{y^{16}}{x^{16}}\cdot\frac{e_1}{f_1}] + \frac{y^{33}}{x^{33}}[\frac{e_2}{f_2} + \frac{y^{16}}{x^{16}}\cdot\frac{e_3}{f_3}] + \cdots \end{aligned}\right\}$$

ここで、$e_k = c_{2k}d_{2k+1}x^8 + c_{2k+1}d_{2k}y^8$, $f_k = d_{2k}d_{2k+1}x^8$; $k = 0,1,2\cdots$

以下、[ ]内の有理数の分子か分母の桁数が n 桁に達する t 段目まで処理を続ける。

3. 入力値が$O(1)$桁である関数計算の計算量

本章では、第 2 章で示した入力値が$O(1)$桁の有理数の場合に、無限級数に展開される関数を多数桁精度(n 桁)でトーナメント有理数化処理で計算するときの計算量を評価する。通分処理は分母が求める桁数と同等となったところで止め、n 桁精度の除算で実数化する。

関数計算の計算量の評価では下記の記号を使用する。無限級数のn 桁精度での関数計算に必要な項数は２のべき乗の倍数とはならないが、計算量のオーダーの算出のためここで２のべき乗の倍数としても一般性は失われない。 分母の桁数がn 桁になったところで有理数化処理を中止して、除算で実数化するため最終的に実数化する有理数の個数をk とする。またt はトーナメント方式で２項ずつ有理数化する段数を示す。

トーナメント有理数化の段数	: t	
実数化する有理数の個数	: k	
１有理数に集約された項数	: 2^t	
関数計算に必要な項数	: $2^t \cdot k$	
計算結果の関数値の桁数	: n	
一回の通分処理での桁数平均増加比	: $2r$	, $r \geq 1$
入力値(有理数)の桁数	: L	, $L \cdot (2r)^t = n$
1回の通分処理に必要な乗算回数	: C_1	
n桁の乗算の演算量	: $M(n)$	
n桁の除算の演算量	: $D(n) = C_2 \cdot M(n)$	

ここで、k, C_1は$O(1)$の整数、C_2は$O(1)$の実数で、t は$O(\log_2 n)$の整数である。

このとき$r \geq 1$および現時点で知られている乗算の最良の計算量[3)4)]が

$O(M(n)) = O(n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n)$ であることを考えると

$M(n) \geq 2M(n/2) \geq 2M(n/(2r))$ が成立する。

なお、この関係式は筆算による$O(M(n)) = O(n^2)$、や Karatsuba 法に基づく$O(M(n)) = O(n^{\log_2 3})$ の場合においても成立することに注意しておく。

トーナメント有理数化処理と記号との関係の一部を以下に示す。ここで、vは級数の各項で、有理数である。↓はトーナメント方式で２項ずつ通分処理をして新しい有理数にすることを示す。最終的に分子、分母がほぼn 桁のk 個の有理数にする。これを多数桁の除算でn 桁の実数にする。

2^t 項(L桁の有理数)　2^t 項(L桁の有理数)　2^t 項(L桁の有理数)

展開

級数 ： $[\underline{(v,v)}\ \underline{(v,v)} \cdots \underline{(v,v)}]\ [\underline{(v,v)}\ \underline{(v,v)} \cdots \underline{(v,v)}] \cdots [\underline{(v,v)}\ \underline{(v,v)} \cdots \underline{(v,v)}]$

$\downarrow\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow\ \downarrow \quad \downarrow$

1段目 ： $[\underline{(w\ ,\ w)} \cdots \underline{(w\ ,w)}]\ [\underline{(w\ ,\ w)} \cdots \underline{(w\ ,w)}] \cdots [\underline{(w\ ,\ w)} \cdots \underline{(w\ ,w)}]$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

t段目 ： $[\quad (z_0) \quad]\ [\quad (z_1) \quad] \cdots [\quad (z_{k-1}) \quad]$

n桁の有理数 (1番目)　n桁の有理数 (2番目)　n桁の有理数(k番目)

最終的に求めた有理数$z_i\ (i=0,1,2,\cdots,k-1)$を２章の記号$(x,y,F,G)$を用いて、

$z_i = (\dfrac{y}{x})^{\gamma+2^t i\beta} \cdot \dfrac{F_{t,i}}{G_{t,i}}$ と表示する。

トーナメント有理数化処理は 桁数$(F_{t,i}) \le n$，桁数$(G_{t,i}) \le n$ が最終的に求めた有理数z_iにおいて成立する最大の段数tまで行なう。

これにより、無限級数に展開される関数のn桁精度計算の演算量$f(n)$は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(n) &= k \cdot [C_1 \cdot \sum_{i=1}^{t} \{2^{t-i} \cdot M(L \cdot (2r)^i)\} + D(n)] \\
&= k \cdot [C_1 \cdot \sum_{i=1}^{t} \{2^{t-i} \cdot M(n/(2r)^{t-i})\} + C_2 \cdot M(n)] \\
&= k \cdot [C_1 \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \{2^{i} \cdot M(n/(2r)^{i})\} + C_2 \cdot M(n)]
\end{aligned}
$$

ここで、$M(n) \ge 2M(n/2r)$なる関係式を代入すると次の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
f(n) &\le k \cdot [C_1 \cdot \sum_{i=0}^{t-1} M(n) + C_2 \cdot M(n)] \\
&= k \cdot [C_1 \cdot t \cdot M(n) + C_2 \cdot M(n)]
\end{aligned}
$$

さらに、k, C_1, C_2は$O(1)$の値で、tは$O(\log_2 n)$の整数なので、演算量$f(n)$のオーダーを評価すると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
O(f(n)) &= O(k \cdot C_1 \cdot t \cdot M(n)) = O(k \cdot C_1 \cdot \log_2 n \cdot M(n)) \\
&= O(M(n) \cdot \log_2 n)
\end{aligned}
$$

すなわち、入力値が$O(1)$桁の有理数の場合に無限級数に展開される関数のn桁精度関数値計算の計算量は$O(M(n)\cdot\log_2 n)$となる。

4. 入力値が多数桁精度(m桁)の場合の計算方法

本章では、無限級数で表現される関数の入力値がm桁$(m \le n)$で、結果の関数値がn桁精度の実数の計算を考える。入力値が区間外の値の場合は適当な区間還元方式で区間内の実数の関数計算に帰着できるため、ここでは入力値は級数が容易に収束する区間内の値とする。

まず、m桁の実数Xを上位桁から分母の桁数が$\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$桁$(m \le 2^{p-1}\alpha)$の有理数に分ける。このとき、上位桁から分割に対応する値（有理数）を下記のように表す。ここでの計算はB進法とする。10進法を採用した場合は$B=10$である。

小数点以下桁数	分母の桁数	値（有理数）
$1\sim\ \alpha$	α	$a_1 = \dfrac{x_1}{B^{\alpha}}$
$\alpha+1\sim 2\alpha$	2α	$a_2 = \dfrac{x_2}{B^{2\alpha}}$
$2\alpha+1\sim 4\alpha$	4α	$a_3 = \dfrac{x_3}{B^{4\alpha}}$
$\cdots$		
$2^{p-2}\alpha+1\sim 2^{p-1}$	$2^{p-1}\alpha$	$a_p = \dfrac{x_p}{B^{2^{p-1}\alpha}}$

まず、関数$\exp(X)$と関数$\sin(X)$の計算を考える。
上記記号を使用すると$\exp(X)$および$\sin(X)$は次のように表される。

$$\begin{aligned}\exp(X) &= \exp\left(\frac{x_1}{B^{\alpha}}+\frac{x_2}{B^{2\alpha}}+\frac{x_3}{B^{4\alpha}}+\frac{x_4}{B^{8\alpha}}+\cdots+\frac{x_p}{B^{2^{p-1}\alpha}}\right)\\ &= \exp(a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_p)\\ &= \exp(a_1)\cdot\exp(a_2)\cdot\exp(a_3)\cdot\exp(a_4)\cdots\exp(a_p)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin(X) &= \sin\left(\frac{x_1}{B^{\alpha}}+\frac{x_2}{B^{2\alpha}}+\frac{x_3}{B^{4\alpha}}+\cdots+\frac{x_p}{B^{2^{p-1}\alpha}}\right)\\
&= \sin(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_p)\\
&= \sin(a_1)\cdot\cos(a_2+a_3+\cdots+a_p)+\cos(a_1)\cdot\sin(a_2+a_3+\cdots+a_p)\\
&= \sin(a_1)[\cos(a_2)\cdot\cos(a_3+\cdots+a_p)-\sin(a_2)\cdot\sin(a_3+\cdots+a_p)]\\
&\quad +\cos(a_1)[\sin(a_2)\cdot\cos(a_3+\cdots+a_p)+\cos(a_2)\cdot\sin(a_3+\cdots+a_p)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(a_3+\cdots+a_p) &= \sin(a_3)\cdot\cos(a_4+\cdots+a_p)+\cos(a_3)\cdot\sin(a_4+\cdots+a_p)\\
\cos(a_3+\cdots+a_p) &= \cos(a_3)\cdot\cos(a_4+\cdots+a_p)-\sin(a_3)\cdot\sin(a_4+\cdots+a_p)\\
\sin(a_4+\cdots+a_p) &= \sin(a_4)\cdot\cos(a_5+\cdots+a_p)+\cos(a_4)\cdot\sin(a_5+\cdots+a_p)\\
\cos(a_4+\cdots+a_p) &= \cos(a_4)\cdot\cos(a_5+\cdots+a_p)-\sin(a_4)\cdot\sin(a_5+\cdots+a_p)
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

$$
\begin{aligned}
\sin(a_{p-1}+a_p) &= \sin(a_{p-1})\cdot\cos(a_p)+\cos(a_{p-1})\cdot\sin(a_p)\\
\cos(a_{p-1}+a_p) &= \cos(a_{p-1})\cdot\cos(a_p)-\sin(a_{p-1})\cdot\sin(a_p)
\end{aligned}
$$

これから、 $\exp(X)$ の計算は p 個の有理数を入力値とする exp 関数に分解でき、$\sin(X)$ の計算は p 組の有理数を入力値とする sin 関数、cos 関数に分解できることが分かる。分解した関数の入力値は exp 関数、sin 関数、cos 関数で同一で、p 個の有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ である。有理数 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ は添え字が 1 増加するごとに桁数が 2 倍ずつ増加するが、級数展開した関数の計算に必要な項数は約半分ずつ減少する。

このため、分解後の exp, sin, cos の各関数の計算量は求める桁数を n とし、n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき、各々が $O(M(n)\cdot\log_2 n)$ となる。一方、分解後の計算すべき関数の個数は p の定数倍で $O(\log_2 m)$ である。従って、入力値 X が m 桁精度のとき関数 $\exp(X)$ および $\sin(X)$ の n 桁精度の計算の計算量は $O(M(n)\cdot\log_2 n\cdot\log_2 m)$ となる。

一般的に、加法定理が適用できる関数の多倍長計算では、入力値を上位桁から上手に分割し、分割した有理数を入力とする関数値の演算量を $f(n)$ とするとき、入力が m 桁精度で、n 桁精度の関数値の計算量は $O(f(n)\cdot\log_2 m)$ となる。

一方、 入力値が $O(1)$ 桁の有理数で $O(n)$ の項数の計算が必要な、無限級数関数の n 桁精度の計算は、n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき $O(M(n)\cdot\log_2 n)$ の計算量であることを３章で説明した。

このように加法定理が適用できかつ無限級数で表現される関数は、exp 関数や sin 関数と同様に入力値が m 桁精度で、n 桁精度の関数値を計算する計算量は $O(M(n)\cdot\log_2 n\cdot\log_2 m)$ となる。

5. 並列化と結果の再利用

本 DRM 法は入力値 X を上位桁から複数個の有理数に分割し、加法定理で各分割に対応する関数値から最終的に求める関数値を計算する部分と、トーナメント有理数化処理で各分割ごとの入力値に対応する関数値を計算する部分から構成される。

２章で説明したトーナメント有理数化処理では、各段でのトーナメント有理数化の計算は完全に独立であり並列化できる。さらに、加法定理を使用して入力値を分割した各分割関数は互いに独立であり、分割関数ごとに並列計算可能である。

計算結果の再利用に関しては、トーナメント有理数化処理は有理数で表現しているため、最終段の除算による実数化を除き、正確な値で表現されている。そのため、計算桁数を増加する場合は、最終段の除算部分を除き有理数で表現している部分はすべて再利用可能である。

また、入力値 X の桁数 m が増加した場合も、上位桁から複数個の有理数に分割して各分割ごとに関数値を計算しているため、それまでにトーナメント有理数化処理で計算した有理数は有効に再利用可能である。

6. 関連研究

提案した DRM 法のなかの二つの方法のうち、最初のトーナメント有理数化処理に関するものは文献 5) と文献 6) の関連研究がある。一方、入力値を有理数に分割して加法定理を使用しトーナメント有理数化処理と結合する方式の提案は他に見当たらない。なお一般的な分割統治法が適応できる計算で、トーナメント方式による計算量の $\log_2$ オーダーへの削減と並列化適応性については佐々木他の論文 [7] に示されている。

Bailey 他の論文 [5] は、計算量の評価からトーナメント有理数化処理に似た手法を適用していると推定されるが、具体的な計算方法を示していない。

右田他の論文 [6] は入力値が $O(1)$ 桁に限定されており、加法定理と結合して多数桁関数システムとして閉じることは考慮されていない。なおトーナメント有理数化処理部分、すなわち入力値が $O(1)$ 桁の場合については右田他の論文 [6] は後の論文 [2] と同時期に発表されているが後の方が１ヶ月早い。

7. まとめ

n 桁の乗算の演算量を $M(n)$ とするとき、三角関数、指数関数、対数関数および逆三角関数等の無限級数で表現される関数を、入力値が m 桁精度で関数値を n 桁の精度で求めるには、提案した DRM 法を使用して $O(M(n)\cdot\log_2 n\cdot\log_2 m)$ の計算量で計算できることが判明した。提案した DRM 法は二つの方法で構成される。一つは入力値が $O(1)$ 桁の有理数の場合に、無限級数に展開される関数で n 桁精度の関数値計算における計算量は $O(M(n)\cdot\log_2 n)$ となることである。もう一つは加法定理が適用できる関数の多数桁計算では、入力値を上位桁から分母の桁数が $\alpha, 2\alpha, 4\alpha, \cdots, 2^{p-1}\alpha$ 桁ずつの有理数に分割

し、各分割した関数値の演算量を$f(n)$とするとき、入力がm桁精度で、n桁精度の関数値の計算量は$O(f(n)\cdot\log_2 m)$となることである。この二つの方法を結合して、多数桁精度の入力で多数桁の関数値計算の計算量を削減するのがDRM法である。

本DRM法は$O(1)$の精度の入力に対する多数桁精度を必要とする関数計算で、Brentのアルゴリズムと同一の計算量を持つが、適用範囲が広く計算方法が単純で関数計算まで含めた多数桁計算システムの構築に有用である。また、自然な並列化が可能な点、計算桁数を増加するとき計算済みの有理数が再利用可能な点、およびBrent[1]のアルゴリズムより単純で分かり易い点が特長である。

今後の研究として、DRM法に基づく高速高精度な数学関数計算パッケージの作成と性能評価がある。

8. 参考文献

1) R.P.Brent; Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions, J.ACM., Vol.23, No.2, Apr. 1976, pp.242-251

2) 後 保範; 逆数型無限級数のn桁計算の演算量を削減する前処理方式, 京大数理研予稿集[数値計算における前処理の研究], Nov. 1998, pp.9-9

3) D.E.Knuth; The Art of Computer Programming, Vol.2. Addison-Wesley, Reading, Mass. 3rd edition, 1997

4) A.Schönhage, V.Strassen; Schnelle Multiplication grosser Zahlen, Computing 7, 1971, pp.281-292

5) D.H.Bailey, J.Borwein, P.Borwein; Ramanujan, Modular Equations, and Approximations to Pi or How to compute one Billion Digits of Pi, American Mathematical Monthly, Vol.96, 1989, pp.201-219, http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/borwein

6) 右田剛史, 天野晃, 浅田尚紀, 藤野清次; 級数の集約による多倍長数の計算法とπの計算への応用, 情報処理学会研究報告, HPC 76-4, Dec. 1998, pp.31-36

7) T.Sasaki, Y.Kanada; Parallelism in Algebraic Computation and Parallel Algorithms for Symbolic Linear Systems, Proceedings of the 1981 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1981, pp.160-167

8) 金田康正; πのはなし, 東京図書, 1991

9) 高橋大介, 金田康正; 多倍長平方根の高速計算法, 情報処理学会研究報告, HPC 58-9, 1995, pp.51-56

10) 高橋大介, 金田康正; 分散メモリ計算機による円周率の515億桁計算, 情報処理学会論文誌, Vol.39, 1998, pp.2074-2083

11) 大浦拓哉; 円周率公式の改良と高速多倍長計算の実装, 情報処理学会研究報告, HPC 74-5, Dec. 1998, pp.25-30